MAI 1 - 10. a 11. cvičení - neurčitý integrál 2.

1. „Slepování" primitivních funkcí:
   a) najděte $\int |x|\,dx$; $\int \sqrt{x^6}\,dx$; $\int |\sin x|\,dx$ v R;
   b) najděte v R primitivní funkci k funkci f, je-li
      i) $f(x)=0$ pro $x \le 0$ a $f(x)=2x$ pro $x>0$; ii) $f(x)=x$ pro $x \le 0$ a $f(x)=\sin x$ pro $x>0$;
      iii) $f(x)=-x$ pro $x \le 0$ a $f(x)=x^2$ pro $x>0$;

2. Ukažte, daná funkce nemá v R funkci primitivní:
   a) $f(x)=\operatorname{sgn} x$; b) $f(x)=x$ pro $x \le 0$ a $f(x)=2x+1$ pro $x>0$.

3. Ukažte, že funkce $f: R \to R$, definovaná jako $f(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \ne 0, f(0)=0$, má v R primitivní funkci, i když není spojitá v bodě $x=0$.

A počítání integrálů:

Najděte primitivní funkce na maximálních intervalech:

1. „Opačný směr" užití větu o substituci (často se užívá název - 2.věta o substituci) :
   Funkce f je spojitá na intervalu (a,b), g' je spojitá a $g' \ne 0$ na intervalu (α,β), $g(\alpha,\beta)=(a,b)$, pak, je-li
   <u>$\int f(g(t))g'(t)\,dt = G(t)+C$ na (α,β), je na intervalu (a,b) $\int f(x)\,dx = G(g^{-1}(x))+C$:</u>

   $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2}\,dx$ $(\sqrt{x}=t)$; $\int \frac{1+tg^2x}{1+tgx}\,dx$ $(tgx=t)$; $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$;

   (*) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ a $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ($x=\sinh t\,(=\frac{e^t-e^{-t}}{2})$).

2. Integrace
   „per partes" + substituce" :

   $\int arctg\,x\,dx$; $\int x\cdot arctg\,x\,dx$; $\int \arcsin x\,dx$; $\int\frac{x^2 arctg\,x}{1+x^2}\,dx$; $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$;

   $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$; $\int \arcsin^2 x\,dx$;

   nebo „substituce + per partes":

   $\int\frac{1}{x^3}\exp(\frac{1}{x^2})\,dx$; $\int\frac{1}{x^2}arctg(\frac{1}{x})\,dx$; $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; $\int arctg\sqrt{x}\,dx$; $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$; $\int\arcsin^2 x\,dx$.

3. Integrál racionální funkce:

a) integrace parciálních (jednoduchých) zlomků:

$$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx\,; \quad \int \frac{1}{2-x}\,dx\,; \quad \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx\,; \quad \int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\,dx\,; \quad \int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,dx\,;$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx\,; \quad \int \frac{1}{(x^2+9)^3}\,dx\,.$$

b) integrace racionálních funkcí (rozklad na parciální zlomky a jejich integrace):

$$\int \frac{2x-11}{x^2+3x-10}\,dx\,; \quad \int \frac{3x+9}{(x^2-1)(x+2)}\,dx\,; \quad \int \frac{x^3+5x^2+15x+12}{x^2+3x+2}\,dx\,; \quad \int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x-2}\,dx\,;$$

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx\,; \quad \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx\,; \quad \int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx\,; \quad \int \frac{5x^2+2x+3}{x^3+x^2-2}\,dx$$

$$\int \frac{x^3+x^2-2x-10}{x^3+4x^2+5x}\,dx\,; \quad \int \frac{7x+4}{x^3+x^2-8x-12}\,dx\,; \quad \int \frac{x^3-x-1}{(x^2+2)^2}\,dx\,.$$